А. Р. Миротин

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ: МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Учебное пособие

Гомель 2010

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный текст представляет собой сокращенную запись семестрового курса лекций по функциональному анализу и интегральным уравнениям, который на протяжении ряда лет автор читает на математическом факультете ГГУ им. Ф. Скорины. Традиционно этот курс в ГГУ начинается в четвертом семестре и содержит теорию меры и интеграла Лебега (обслуживающую не только анализ, но и теорию вероятностей и математическую статистику), а также элементы того, что раньше не совсем удачно называлось теорией функций действительного переменного. Лекции охватывают весь материал по теме «Теория меры и интеграл Лебега», предусмотренный образовательными стандартами Республики Беларусь и учебными программами для высших учебных заведений по специальностям 1-31 03 01 Математика и 1-31 03 03 Прикладная математика. Цель предлагаемых текстов лекций — обеспечить студентов учебным пособием, по которому было бы удобно готовиться к экзамену (включая контролируемую самостоятельную работу).

Изложение в лекциях сопровождаются довольно значительным числом упражнений (как правило, легких), выполнение большинства из которых необходимо для неформального усвоения материала. Дополнительный (необязательный) материал выделен знаками *. Внутри каждой главы формулы имеют двойную нумерацию, например, (2.1) обозначает первую формулу параграфа 2; теоремы, леммы и т. д. нумеруются раздельно по параграфам. Знак $:=$ читается «равняется по определению»; конец доказательства обозначается знаком $\square$.

# ВВЕДЕНИЕ

Безусловно правильным, хотя и далеко не полным, ответом на вопрос «что такое интеграл?» является «предел интегральных сумм». Все дело в том, как строить эти суммы. Как известно, при построении римановых сумм $\sigma(f, P, \xi)$ для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ исходят из разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in \Delta_k := [x_{k-1}, x_k]$ и полагают

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(\Delta_k),$$

где $y_k = f(\xi_k)$, а $m(\Delta_k) = x_k - x_{k-1}$ — длина отрезка $\Delta_k$. Интеграл тогда определяется как предел этих сумм при неограниченном измельчении отрезка (если этот предел существует и не зависит от выбора отмеченных точек).

Интеграл Римана весьма полезен в анализе и его приложениях, однако со временем обнаружился ряд его недостатков, из которых отметим следующие:

- многие «простые» функции (например, функция Дирихле) оказываются не интегрируемыми;

- он не позволяет должным образом развить гармонический анализ (в частности, теорию рядов Фурье);

- «по Риману» нельзя интегрировать функции, заданные на абстрактных множествах (а это необходимо делать, например, при современном подходе к теории вероятностей);

- условия теорем о предельном переходе под знаком интеграла Римана слишком ограничительны;

- пространство интегрируемых по Риману функций с интегральной метрикой не полно;

- условия справедливости основной теоремы математического анализа («формулы Ньютона-Лейбница») являются весьма жесткими.

Это привело к необходимости модификации теории интеграла, что и было сделано А. Лебегом и его последователями в начале XX века.

Исходная идея А. Лебега – при построении интегральных сумм нужно разбивать не область определения, а множество значений $E(f)$ функции $f$. При этом, если точки $y_k$ разбивают отрезок, содержащий $E(f)$ (для простоты мы считаем $f$ ограниченной), на промежутки $I_k$, то интегральные суммы Лебега имеют вид

$$\sum_k y_k m(f^{-1}(I_k)),$$

где $m(f^{-1}(I_k))$ — должным образом обобщенная «длина» (мера) прообраза $f^{-1}(I_k)$ множества $I_k$ при отображении $f$. Поскольку множества $f^{-1}(I_k)$ могут быть устроены весьма сложно, реализация этой идеи потребовала, прежде всего, построения соответствующей теории меры на прямой, затем – теории тех функций, для которых множества вида $f^{-1}(I_k)$ можно измерить (такие функции стали называть измеримыми), и, наконец, собственно теории интеграла.

Таким образом, если в римановых суммах значения функции идут просто в порядке следования их абсцисс, то в лебеговы они входят, так сказать, с учетом кратности. Поэтому, сопоставляя свой процесс интегрирования с римановым, А. Лебег сравнивал их с процессом подсчета большой суммы денег, осуществляемой двумя кассирами, – опытным и неопытным. Неопытный кассир суммирует купюры все подряд, в том порядке, как они ему попадаются. Опытный же сначала раскладывает их по достоинству и лишь затем вычисляет сумму, используя умножение.

Преимущества лебеговского подхода видны уже на примере функции Дирихле $D$, принимающей значение 1 на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и значение 0 на множестве $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Поскольку, как мы увидим позже, $m(\mathbb{Q}) = 0$, все суммы Лебега функции Дирихле равны нулю, а потому интеграл Лебега от $D$ существует (и равен нулю), хотя по Риману она, как уже было отмечено, не интегрируема ни на каком отрезке положительной длины.

Описанная выше схема для случая функций, определенных на числовой прямой, реализуется не проще, чем для функций многих переменных и даже для функций на произвольном пространстве с мерой. Этим и объясняется, что (в нарушение принципа историзма в преподавании) теория Лебега излагается далее сразу в максимальной общности, а исторически первый и важный случай числовой прямой с мерой Лебега рассматривается в качестве «модельного примера»[1].

[1] В учебнике [7] изложение общей теории меры предваряется построением меры Лебега на плоскости.

# Глава 1. Элементы теории множеств

Целью этой небольшой главы является напоминание некоторых понятий и фактов «наивной» (т. е. не аксиоматической) теории множеств, уже известных студентам-математикам, например, по курсам «Введение в специальность» и «Математический анализ». Более подробные сведения (включающие и аксиоматику Цермело-Френкеля) можно найти, например, в [5].

## §1. Множества, отношения и отображения

В теории множеств есть два первичных (неопределяемых) понятия — «элемент» и «множество». При этом элемент $x$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $A$, что записывается как $x \in A$ и $x \notin A$ соответственно. Задать множество — значит указать, какие объекты являются его элементами. Слова «множество», «совокупность», «набор», «семейство» будут считаться синонимами. Совокупность всех подмножеств множества $X$ будет обозначаться $\mathcal{P}(X)$, пустое множество — знаком $\emptyset$. Отметим, что далее соотношение включения $A \subset X$ не исключает, что $A = X$.

Если $\{E_i\}_{i\in I}$ есть семейство множеств, то мы можем образовать *объединение* $\cup_{i\in I} E_i := \{x : \exists i\ x \in E_i\}$ и *пересечение* $\cap_{i\in I} E_i := \{x : \forall i\ x \in E_i\}$ его членов. Если множества $A$ и $B$ не пересекаются, то их объединение будет обозначаться $A \sqcup B$ и называться *дизъюнктным объединением* множеств $A$ и $B$. Дизъюнктное объединение семейства $\{E_i\}_{i\in I}$ будет обозначаться $\sqcup_{i\in I} E_i$.

*Разность* $A$ и $B$ определяется как $A \setminus B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. Если из контекста ясно, что все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого «универсального» множества $X$, то разность $X \setminus E$ называется *дополнением* подмножества $E$ множества $X$ и будет обозначаться $E'$. При этом справедливы *правила де Моргана* (формулы двойственности)

$$\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)' = \bigcap_{i\in I} E_i', \ \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)' = \bigcup_{i\in I} E_i'.$$

Если $X$ и $Y$ — два множества, то их *прямое* (*декартово*) произведение $X \times Y$ есть множество, образованное всеми упорядоченными парами $(x, y)$, где $x \in X, y \in Y$. *Отношением* между множествами $X$ и $Y$ называется подмножество множества $X \times Y$ (если $X = Y$, то говорят об отношении на множестве $X$). Если $R$ есть отношение между $X$ и $Y$, то вместо $(x, y) \in R$ часто пишут $xRy$.

*Обратное отношение* $R^{-1}$ между множествами $Y$ и $X$ определяется как $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Наиболее важными являются следующие три типа отношений.

1. Отношение эквивалентности. Это отношение $R$ на множестве $X$, обладающее следующими свойствами:

а) $xRx$ при всех $x \in X$ (*рефлексивность*),

б) $xRy$ тогда и только тогда, когда $yRx$ (*симметричность*),

в) если $xRy$ и $yRz$, то $xRz$ (*транзитивность*).

В этом случае вместо $xRy$ часто пишут $x \sim y$. Множество $\tilde{x} = \{y \in X : y \sim x\}$ называют *классом эквивалентности* элемента $x \in X$. Легко доказать, что $X$ *есть дизъюнктное объединение таких классов* (докажите).

2. Отношение порядка. (*Частичным*) *порядком* на множестве $X$ называется отношение $R$ на $X$, которое рефлексивно, транзитивно и обладает следующим свойством:

г) $xRy$ и $yRx$ влечет $y = x$ (*антисимметричность*).

При этом множество $X$ называется *частично упорядоченным*. Если для любых $x, y \in X$ имеет место либо $xRy$, либо $yRx$, то порядок $R$ называется *линейным*, а множество $X$ — *линейно упорядоченным*. Мы будем обозначать отношение порядка знаком $\leq$. Если $x \leq y$, то говорят также, что $x$ *не превосходит* $y$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$. Элемент $b \in X$ называется *верхней границей множества* $A \subset X$, если $x \leq b$ при всех $x \in A$. Само множество $A$ при этом называется *ограниченным сверху*. Аналогично определяются нижняя граница и ограниченное снизу множество. Элемент $a \in X$ называется *максимальным*, если из неравенства $a \leq x$ следует $a = x$. Следующее утверждение является обобщением принципа математической индукции.

**Лемма Цорна**. *Если множество $X$ частично упорядочено, причем любое его линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то каждый элемент из $X$ не превосходит некоторого максимального.*

3. Отображения (функции). Интуитивно функция — это зависимость между переменными величинами. На языке теории множеств этому понятию можно придать строгий смысл (если считать корректно определенным понятие прямого произведения). Именно, *отображение* $f : X \to Y$ есть такое отношение $G_f$ между множествами $X$ и $Y$, что

для любого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$, для которого $xG_f y$. В этом случае пишут $y = f(x)$ (или $f : x \mapsto y$), а $G_f$ называют *графиком отображения* $f$ (по существу, при таком подходе отображение отождествляется со своим графиком). Часто слова «отображение» и «функция» считаются синонимами, но мы будем называть функциями лишь отображения в числовые множества. Для различных типов отображений используются также названия «преобразование», «последовательность», «оператор», «функционал», «мера» и т. д. Часто семейство подмножеств $\{E_i\}_{i\in I}$ множества $X$ тоже определяют как отображение $i \mapsto E_i$ из $I$ в $\mathcal{P}(X)$.

Множество $X$ называют *областью* (или *множеством*) *определения функции* $f$ (его еще обозначают $D(f)$), а множество $f(X) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ (его еще обозначают $E(f)$) — *множеством ее значений*. Если $A \subset X$, то мы обозначаем через $f|A$ *сужение отображения* $f$ на множество $A$ (т. е. $D(f|A) = A$, $(f|A)(x) = f(x)$ при $x \in A$). Множество значений сужения $f|A$ обозначается $f(A)$ и называется *образом множества* $A$ *при отображении* $f$. Если $C \subset Y$, то множество $f^{-1}(C) := \{x \in X : f(x) \in C\}$ называется (полным) *прообразом множества* $C$ *при отображении* $f$. Операция взятия прообраза перестановочна с операциями объединения, пересечения и дополнения, т. е. справедливы следующие равенства:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i), \tag{1.1}$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i), \tag{1.2}$$

$$f^{-1}(E') = (f^{-1}(E))'. \tag{1.3}$$

Кроме того,

$$f\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(F_i),$$

но

$$f\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(F_i).$$

**Упражнение 1**. Докажите эти соотношения.

*Прямое (декартово)* произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть множество, образованное всеми упорядоченными наборами (конечными последовательностями) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n$. Другими словами, оно состоит из всевозможных отображений $x : \{1, \ldots, n\} \to \cup_i X_i$, таких, что $x(i) \in X_i, i = 1, \ldots, n$. В таком виде это понятие переносится на произвольные семейства $\{X_i\}_{i \in I}$ не пустых множеств. По определению, прямое (декартово) произведение $\prod_{i \in I} X_i$ состоит из всевозможных отображений $x : I \to \cup_i X_i$, таких, что $x(i) \in X_i, i \in I$. Но всегда ли существуют такие отображения, т. е. всегда ли можно образовать новое множество, выбрав из каждого $X_i$ ровно по одному элементу? Оказывается, утверждение о непустоте произведений $\prod_{i \in I} X_i$ не пустых множеств не зависит от остальных аксиом теории множеств. Хотя это утверждение и приводит к ряду удивительных результатов (типа существования не измеримых по Лебегу множеств, см. ниже), но отказ от него сильно обедняет математику, и большинство математиков в настоящее время принимают (и применяют) следующий постулат.

**Аксиома выбора**. *Множество $\prod_{i \in I} X_i$ не пусто, если не пусты все множества $X_i$ и множество $I$.*

Лемма Цорна является следствием аксиомы выбора (и наоборот).

Если обратное отношение $G_f^{-1}$ между множествами $Y$ и $X$ само является отображением (из $Y$ в $X$), то оно называется *обратным отображением (обратной функцией)* и обозначается $f^{-1}$, а исходное отображение $f$ называется *обратимым*. Это равносильно тому, что уравнение $f(x) = y$ при каждом $y \in Y$ имеет, и притом единственное, решение $x =: f^{-1}(y) \in X$ (почему?). В таком случае отображение $f$ называется также *биективным*. Условие биективности полезно разделить на два. Если уравнение $f(x) = y$ при $y \in Y$ имеет не более одного решения, т. е. из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то $f$ называется *инъективным*. А если это уравнение при каждом $y \in Y$ имеет (вообще говоря, не единственное) решение, т. е. $f(X) = Y$, то $f$ называется *сюръективным* (или *отображением на $Y$*). Таким образом, отображение биективно тогда и только тогда, когда оно инъективно и сюръективно.

Наконец напомним, что если мы имеем два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то их *композиция* (суперпозиция, сложная функция) $g \circ f : X \to Z$ определяется равенством $g \circ f(x) := g(f(x))$.

**Упражнения 2**. 1) Проверьте, что композиция отображений обладает сочетательным свойством: если еще $h : Z \to T$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2) Будет ли композиция отображений $f, g : X \to X$ обладать переместительным свойством: $g \circ f = f \circ g$?

3) Пусть отображение $f : X \to Y$ обратимо. Чему равны композиции $f^{-1} \circ f$ и $f \circ f^{-1}$?

## §2. Счетные и несчетные множества

Важнейшим открытием Георга Кантора, ознаменовавшим собой возникновение теории (бесконечных) множеств, явилось обнаружение того факта, что бесконечные множества могут различаться «по величине». Чтобы придать этому утверждению строгий смысл, нужно научиться сравнивать бесконечные множества.

**Определение 1**. Множества $X$ и $Y$ называются *равномощными* (*имеющими одинаковую мощность, эквивалентными*), если существует биективное отображение $f : X \to Y$. Этот факт далее будет обозначаться так: $|X| = |Y|$ (или $X \sim Y$). Используются также обозначения $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$, $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ (обозначение Кантора).

Выполнение нижеследующих упражнений необходимо для надлежащего усвоения начал теории множеств.

**Упражнения 1**. Докажите, что

1) $\{2, 3, \ldots\} \sim \mathbb{N}$;

2) любые два интервала (отрезка) эквивалентны между собой;

3) $(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$;

4) отношение $X \sim Y$ рефлексивно, симметрично и транзитивно;

5) $A \sim A_1, B \sim B_1 \Rightarrow A \times B \sim A_1 \times B_1$.

При этом множество $X$ называется *конечным* и состоящим из $n$ элементов, если $X \sim \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. В противном случае $X$ называется *бесконечным*.

Простейшими из бесконечных множеств являются множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и эквивалентные ему множества.

**Определение 2**. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$.

Другими словами, множество $A$ счетно, если его элементы можно занумеровать натуральными числами, т. е. «расположить»в последовательность:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

В этом случае говорят также, что $A$ *имеет счетную мощность* и пишут $|A| = \aleph_0$ (правая часть читается «алеф нуль»).

**Упражнения 2**. Докажите, что

1) множество, эквивалентное счетному, также счетно;

2) объединение конечного и счетного множества счетно;

3)* объединение двух счетных множеств счетно ;

4) множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

Следующие две теоремы показывают (пока на интуитивном уровне), что счетная мощность — наименьшая из мощностей бесконечных множеств.

**Теорема 1.** *Всякое бесконечное множество $A$ имеет счетное подмножество.*

Докажите!

**Теорема 2.** *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Докажите!

**Теорема 3** (основная теорема теории счетных множеств). *Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.*

**Следствие 1**. *Прямое произведение конечного семейства счетных множеств счетно.*

**Следствие 2**. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

**Упражнения 3**. Докажите, что

1)* объединение конечного семейства счетных множеств счетно;

2)* объединение счетного семейства не пустых конечных множеств счетно.

Следующая теорема фактически положила начало содержательной теории (бесконечных) множеств.

**Теорема 4** (теорема Кантора). *Множество действительных чисел не счетно.*

**Замечание.** Остроумный метод доказательства предыдущей теоремы получил название *диагонального метода Кантора.*

**Определение 3.** Множество $X$, эквивалентное $\mathbb{R}$, называется *множеством мощности континуума* (пишут: $|X| = \mathfrak{c}$).

**Упражнение 4.** Докажите, что

1) $|(a, b)| = \mathfrak{c}$ $(a < b)$;

2)* $|[a, b]| = \mathfrak{c}$ $(a < b)$.

**Определение 4.** Говорят, что мощность множества $A$ *не превосходит мощности множества* $B$ (пишут $|A| \leq |B|$), если $A$ эквивалентно некоторому подмножеству множества $B$. Пишут также $|A| < |B|$, если $|A| \leq |B|$, но $|A| \neq |B|$.

**Примеры 1.** Теорема 1 утверждает, что $\aleph_0 \leq |A|$ для любого бесконечного множества $A$. Теорема 2 утверждает, что если $|X| \leq \aleph_0$, то множество $X$ конечно или счетно.

Таким образом, наименьшая из мощностей бесконечных множеств есть $\aleph_0$. Напротив, наибольшей среди мощностей бесконечных множеств нет:

Введенное выше отношение для мощностей является отношением линейного порядка, т. е. справедливы следующие утверждения.

**Теорема 6** (Шредера-Бернштейна). *Если* $|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |A|$, *то* $|A| = |B|$.

**Теорема 7** (Кантор.) *Для любых двух множеств* $A$ *и* $B$ *либо* $|A| \leq |B|$, *либо* $|B| \leq |A|$.

**Упражнение 5.** Докажите свойство транзитивности для отношения $|A| \leq |B|$.

**Пример 2.** Используя геометрические соображения, легко доказать непосредственно, что любые два интервала (отрезка) положительной длины равномощны (сделайте это). Так как любой такой интервал содержит отрезок и наоборот, то по теореме Шредера-Бернштейна любой интервал положительной длины равномощен любому отрезку положительной длины (и имеет мощность континуума).

При определении мощностей множеств бывает полезно использовать следующее утверждение в сочетании с теоремой Шредера-Бернштейна.

**Лемма 1** (о сравнении мощностей). *Пусть* $f : X \to Y$.
1) *Если* $f$ *инъективно, то* $|X| \leq |Y|$.
2) *Если* $f$ *сюръективно, то* $|X| \geq |Y|$.

# Глава 2. Элементы теории меры

Прототипами мер являются многие математические, физические и т. п. величины, такие как длина, площадь, объем, вероятность, масса, количество теплоты, электрический и магнитный заряды, цена земельного участка. Основными целями данной главы являются изложение теории продолжения меры, заданной первоначально на «бедной» системе подмножеств множества $X$, до меры, определенной на достаточно «богатой» системе его подмножеств, а также изучение мер на прямой, получающихся в результате такого продолжения.

## §1. Системы множеств

Нам потребуются следующие системы множеств, которые далее будут служить областями определения мер.

**Определение 1**. Пусть $X$ — не пустое множество. Не пустая система $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$ называется *алгеброй множеств*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$;

2) $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B' \in \mathcal{A}$.

**Упражнение 1**. Докажите следующие свойства алгебры множеств:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{A}$;

3) $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{j=1}^{n} B_j,\ \cup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}$.

Таким образом, операции объединения, пересечения и разности, произведенные конечное число раз, не выводят из алгебры множеств.

Как правило, «квалифицированные» меры определены на алгебрах, которые замкнуты и относительно счетных объединений и пересечений (так называемых $\sigma$-алгебрах).

**Определение 2**. Пусть $X$ — не пустое множество. Система $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$ называется *$\sigma$-алгеброй*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{B}$ — алгебра множеств;

2) $B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

**Упражнения 2**. Докажите, что

1) $B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$;

2) пересечение любого семейства $\sigma$-алгебр подмножеств множества $X$ само является $\sigma$-алгеброй.

3) если для алгебры $\mathcal{B}$ условие 2 предыдущего определения выполняется только для *дизъюнктных* систем $B_n$, то $\mathcal{B}$ будет $\sigma$-алгеброй.

Часто первоначально мера естественным образом определяется на весьма бедной системе множеств следующего типа (см. примеры в §2):

**Определение 3**. Пусть $X$ — не пустое множество. Не пустая система $\mathcal{S}$ подмножеств множества $X$ называется *полуалгеброй* (множеств), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $B_1, B_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{S}$;

2) $B \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S} : \; B' = \sqcup_{j=1}^{n} B_j$;

3) $X \in \mathcal{S}$.

**Примеры 1**. 1) (Модельный пример). Пусть $X = \mathbb{R}$. Система $\mathcal{I}$, состоящая из множеств вида $[a, b)$ и $(-\infty, a)$, где $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, как легко проверить, будет полуалгеброй. Она называется *полуалгеброй стрелок*;

2) пусть $X = \mathbb{R}$. Система $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, состоящая из множеств вида $\sqcup_{j=1}^{n} I_j$ $I_j \in \mathcal{I}$, будет алгеброй (см. ниже). Она называется *алгеброй элементарных множеств на* $\mathbb{R}$;

*3) пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Система $\mathcal{F}$ событий будет $\sigma$-алгеброй*.

Следующая конструкция позволяет строить неограниченное количество примеров $\sigma$-алгебр.

**Определение 4**. Для любой непустой системы $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ существует наименьшая (по включению) $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$ (это пересечение всех $\sigma$-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$, см. упражнение 2). Она называется *$\sigma$-алгеброй, порожденной системой* $\mathcal{E}$, и обозначается $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Теперь можно дать еще один пример $\sigma$-алгебры, который очень важен для анализа и теории вероятностей.

4) **Определение 5**. $\sigma$-алгебра, порожденная системой $\mathcal{I}$ стрелок, называется *$\sigma$-алгеброй борелевских множеств на* $\mathbb{R}$, и обозначается $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Если $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, то $\sigma$-алгебру $\mathcal{B}_I := \{B \subset I : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ называют *$\sigma$-алгеброй борелевских подмножеств промежутка $I$.*

**Упражнение 3**. Докажите, что $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ совпадает с

а)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех интервалов;

б)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех открытых множеств из $\mathbb{R}$;

в)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех отрезков.

**Теорема-определение 1** (об алгебре, порожденной полуалгеброй). *Пусть $\mathcal{S}$ есть полуалгебра подмножеств множества $X$. Система $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, состоящая из всевозможных конечных дизъюнктных объединений вида $A = \sqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i$ пробегают $\mathcal{S}$, является алгеброй. Она называется алгеброй, порожденной полуалгеброй $\mathcal{S}$. Элементы этой алгебры будем называть элементарными множествами.*

Доказательство. Проверим для $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ аксиомы алгебры. Справедливость первой вытекает из распределительного закона пересечения относительно объединения:

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j).$$

Теперь индукцией по $n$ докажем, что если $E = \sqcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, то $E' \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Действительно, при $n = 1$ это вытекает из определения полуалгебры. Предположим, что при некотором конкретном $n$ наше утверждение доказано, и рассмотрим множество $E = \sqcup_{i=1}^{n+1} A_i$, где $A_i \in \mathcal{S}$. Так как $E = (\sqcup_{i=1}^{n} A_i) \sqcup A_{n+1}$, то по правилу де Моргана $E' = (\sqcup_{i=1}^{n} A_i)' \cap A'_{n+1}$. В силу индуктивного предположения и определения полуалгебры найдутся такие $B_k, C_l \in \mathcal{S}$, что $(\sqcup_{i=1}^{n} A_i)' = \sqcup_{k=1}^{p} B_k$, $A'_{n+1} = \sqcup_{l=1}^{q} C_l$. Снова применяя распределительный закон, получаем окончательно

$$E' = \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} B_k\right) \bigcap \left(\bigsqcup_{l=1}^{q} C_l\right) = \bigsqcup_{k=1}^{p} \bigsqcup_{l=1}^{q} (B_k \cap C_l) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}).\square$$

**Упражнение 4**. Докажите, что $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ есть наименьшая (по включению) алгебра, содержащая $\mathcal{S}$.

**Упражнение 5.** Пусть $\mathcal{S}$ — полуалгебра множеств. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{B}(\mathcal{S})$.

**Упражнение 6.*** Пусть $\mathcal{E}$ — система подмножеств множества $X$, $A \subset X$. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \cap A = \mathcal{B}(\mathcal{E} \cap A)$.

## §2. Меры. Свойства мер

Следующее понятие является одним из основных в современном анализе и теории вероятностей.

**Определение 1**. Пусть $\mathcal{S}$ есть полуалгебра подмножеств множества $X$. Отображение $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$, отличное от тождественной $+\infty$, называется *мерой*, если оно удовлетворяет следующему условию:

если $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ $(A, A_n \in \mathcal{S})$, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

($\sigma$-*аддитивность*).

**Определение 2**. Отображение $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$, отличное от тождественной $+\infty$, удовлетворяющее условию:

если $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ $(A, A_n \in \mathcal{S}, N \in \mathbb{N})$, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n),$$

называется *конечно-аддитивной мерой* .

Ниже мы увидим, что не каждая конечно-аддитивная мера $\sigma$-аддитивна.

Во избежание недоразумений, вместо «мера» мы иногда будем говорить «$\sigma$-аддитивная мера».

**Упражнения 1**. Докажите, что

1)* для любой (конечно- или $\sigma$-)аддитивной меры $\mu$ справедливо равенство $\mu(\emptyset) = 0$;

2) каждая $\sigma$-аддитивная мера конечно-аддитивна;

3) линейная комбинация конечного числа мер с неотрицательными коэффициентами является мерой;

4) для любого $E \in \mathcal{S}$ функция на $\mathcal{S}$, задаваемая формулой $\nu(A) = \mu(A \cap E)$, является мерой.

Эта мера, суженная на полуалгебру $\mathcal{S}_E = \{A \in \mathcal{S} : A \subset E\}$ подмножеств множества $E$ (проверьте, что $\mathcal{S}_E$ есть полуалгебра), называется *сужением меры $\mu$ на множество $E$*. При этом меру $\mu$ естественно называть *продолжением меры $\nu$* с $E$ на $X$ (или с $\mathcal{S}_E$ на $\mathcal{S}$). Эта терминология полностью согласуется с принятой в общей теории отображений.

**Примеры 1**. 1) *Мера Дирака.* Зафиксируем точку $a$ непустого множества $X$. Мера, определенная на $\mathcal{P}(X)$ равенством

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B, \end{cases}$$

называется *мерой Дирака*, или мерой единичной массы, сосредоточенной в точке $a$.

2) *Дискретная мера.* Пусть $\{x_n : n = 1, 2, ...\}$ — не более чем счетное подмножество множества $X$, $p_n > 0$ и $\sum_n p_n < \infty$. Для любого $A \subset X$ положим

$$\mu(A) = \sum_{k, x_k \in A} p_k.$$

Полученная мера называется *дискретной*. Она играет важную роль в некоторых вопросах теории вероятностей (при $\sum_n p_n = 1$).

При $X = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$ и $p_n = 1$ эта мера называется *считающей* (подумайте, почему).

3) *Мера Лебега на прямой* (модельный пример). Пусть $X = \mathbb{R}$. Мера $m$ на полуалгебре стрелок, заданная равенствами

$$m([a, b)) = b - a,\ m((-\infty, b)) = +\infty$$

(«длина»), называется *мерой Лебега на прямой*.

**Упражнение 2**. Проверьте выполнение условия $\sigma$-аддитивности в примерах 1 и 2.

**Определение 3**. Скажем, что последовательность множеств $B_n$ *стремится к множеству* $B$ *снизу* (пишем $B_n \uparrow B$), если $B_1 \subset B_2, \ldots$ и $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

**Упражнение 3**. Определите $B_n \downarrow B$.

**Теорема 1** (свойства мер). *Мера $\mu$ на алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ обладает следующими свойствами:*

*1) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

*В частности, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (монотонность меры).*

*2) $\sigma$-полуаддитивность. Если $B_n, \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$, то*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

*3) Непрерывность снизу. $B, B_n \in \mathcal{A}, B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

*4) Непрерывность сверху. $B, B_n \in \mathcal{A}, B_n \downarrow B, \mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

**Замечания**. 1) Свойство 1) справедливо и для конечно-аддитивной меры.

2) Конечно-аддитивная мера $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}$ обладает свойством *конечной полуаддитивности*: если $B_n, \cup_{n=1}^N B_n \in \mathcal{A}$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n).$$

Это доказывается тем же методом, что и свойство 2).

**Следствие 1**. *Пусть мера определена на $\sigma$-алгебре. Тогда объединение не более чем счетного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

**Упражнение 4.** Докажите, что если $\mu_1, \mu_2$ — две конечные меры, определенные на $\sigma$-алгебрах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно, то система $\{A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ является монотонным классом.

**Определение 4.** Мера $\mu$ на множестве $X$ называется *$\sigma$-конечной*, если $X$ можно представить в виде счетного объединения множеств конечной меры.

**Упражнение 7.** Докажите, что для меры $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}$ и любых $A, B \in \mathcal{A}$ справедливо неравенство $\mu(A \cap B) \leq \sqrt{\mu(A)\mu(B)}$. Верно ли это неравенство для меры, определенной лишь на полуалгебре (см. следующий параграф)?

**Упражнение 8**. Пусть $X = \{a, b\}$. Определим функцию $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ следующим образом: $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\{a\}) = 1,\ \mu(\{b\}) = +\infty,\ \mu(X) = +\infty$. Докажите, что $\mu$ есть мера и она не $\sigma$-конечна.

## §3. Продолжение мер

Любая мера продолжается с полуалгебры на некоторую содержащую ее $\sigma$-алгебру в два этапа.

**Теорема 1** (о продолжении меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру). *Конечно-аддитивную меру $\mu$ можно единственным образом продолжить с полуалгебры $\mathcal{S}$ до конечно-аддитивной меры $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Если $\mu$ $\sigma$-аддитивна, то таково же и ее продолжение.*

Доказательство. Единственность. Пусть $\mu'$– продолжение меры $\mu$ на $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Тогда для любого $A = \sqcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ $(B_i \in \mathcal{S})$ имеем

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu'(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i). \tag{3.1}$$

Таким образом, продолжение, если оно существует, может иметь только вид (3.1).

Существование. Для $A = \sqcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ $(B_i \in \mathcal{S})$ положим по определению

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i).$$

а) Докажем корректность этого определения. Пусть $A = \sqcup_{i=1}^{n} A_i = \sqcup_{j=1}^{n} B_j$ – два разбиения множества $A$ на элементы $A_i, B_j \in \mathcal{S}$. Рассмотрим «общее измельчение» $C_{ij} := A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ (с подобным приемом мы уже встречались в теории интеграла Римана). Тогда

$$A_i = A_i \cap A = A_i \cap \left( \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j \right) = \bigsqcup_{j=1}^{n} C_{ij}.$$

Поэтому $\mu(A_i) = \sum_j \mu(C_{ij})$. Аналогично получаем $\mu(B_j) = \sum_i \mu(C_{ij})$ (проделайте это). Следовательно,

$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_j \mu(B_j) (= \sum_{ij} \mu(C_{ij})).$$

б) Аддитивность и $\sigma$-аддитивность продолжения будем доказывать параллельно. С этой целью ниже будем считать, что индекс $n$ пробегает конечное или счетное множество (в зависимости от того, является ли мера аддитивной, или $\sigma$-аддитивной). Пусть $A = \sqcup_n A_n, \ A, A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. В силу определения алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ имеем представления $A = \sqcup_{i=1}^{k} B_i$, $A_n = \sqcup_{j=1}^{k_n} B_{nj}$ $(B_i, B_{nj} \in \mathcal{S})$. Снова рассмотрим «общее измельчение» $C_{inj} := B_i \cap B_{nj} \in \mathcal{S}$. Как и выше, $B_i = \sqcup_n \sqcup_j C_{inj}$, а потому $\mu(B_i) = \sum_n \sum_j \mu(C_{inj})$. Поэтому

$$\mu(A) := \sum_i \mu(B_i) = \sum_i \sum_n \sum_j \mu(C_{inj}). \tag{3.2}$$

С другой стороны, $\mu(A_n) := \sum_j \mu(B_{nj})$. При этом $B_{nj} = B_{nj} \cap A = B_{nj} \cap (\sqcup_i B_i) = \sqcup_i C_{inj}$, а потому $\mu(B_{nj}) = \sum_i \mu(C_{inj})$. Таким образом,

$$\sum_n \mu(A_n) = \sum_n \sum_j \sum_i \mu(C_{inj}). \tag{3.3}$$

Осталось заметить, что правые части в (3.2) и (3.3) совпадают, так как не зависят от порядка суммирования (почему?). □

**Замечание**. Доказанная теорема показывает, что не нарушая общности мы можем рассматривать меры, определенные на алгебрах множеств (а не на полуалгебрах).

**Следствие 1**. *Мера Лебега $m$ на полуалгебре стрелок («длина») может быть единственным образом продолжена на алгебру элементарных множеств* (пока не доказана $\sigma$-аддитивность $m$, мы можем говорить только о конечно-аддитивном продолжении).

Второй этап продолжения меры не так очевиден. Для его реализации требуется определенная подготовка. Следующая конструкция является абстрактной версией идеи вычисления площади с помощью палетки (но рассматриваются «палетки» со счетным множеством ячеек!).

**Определение 1**. Пусть $\mu$ — мера на алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Определим *внешнюю меру* произвольного множества $E \subset X$ следующим образом:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_n \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_n A_n \right\}$$

(инфимум берется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества $E$ элементами из $\mathcal{A}$).

**Замечание**. Дополняя конечные покрытия множества $E$ элементами из $\mathcal{A}$ пустыми множествами, можно свести дело к счетным покрытиям. Более того, достаточно рассматривать лишь дизъюнктные счетные покрытия, поскольку мы можем заменить $A_n$ на $A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$.

**Теорема 2** (свойства внешней меры). *Внешняя мера обладает следующими свойствами:*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

2) $F \subset E \Rightarrow \mu^*(F) \leq \mu^*(E)$ *(монотонность);*

3) $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ ($\sigma$ *-полуаддитивность* ).

А. Лебег указал такую $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}^*$ подмножеств множества $\mathbb{R}$, содержащую все стрелки, что сужение $m^*|\mathcal{A}^*$ является ($\sigma$-аддитивной) мерой. Предложенное ниже развитие идей А. Лебега принадлежит К. Каратеодори.

Заметим, что множество $A \subset X$ разбивает множество $E \subset X$ на две части: $E = (E \cap A) \sqcup (E \cap A')$. Из конечной полуаддитивности внешней меры следует, что

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'). \tag{3.4}$$

**Определение 2**. Будем говорить, что множество $A \subset X$ *хорошо разбивает множество* $E \subset X$, если предыдущее неравенство обращается в равенство:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'). \tag{3.5}$$

Следовательно, для проверки того, что $A$ хорошо разбивает $E$, достаточно установить неравенство, противоположное (3.4).

**Определение 3**. Множество $A \subset X$ называется *$\mu^*$-измеримым*, если оно хорошо разбивает любое множество $E \subset X$.

Систему всех $\mu^*$-измеримых множеств будем обозначать $\mathcal{A}^*$.

**Лемма 1.** $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

**Лемма 2.** *Сужение $\mu^*$ на $\mathcal{A}$ совпадает с $\mu$.*

Следующий фундаментальный результат служит инструментом для построения мер, определенных на $\sigma$-алгебрах.

**Теорема-определение 3** (о лебеговском продолжении меры). *Для любой меры $\mu$, определенной на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$,*

*1) система $\mathcal{A}^*$ всех $\mu^*$-измеримых множеств есть $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$;*

*2) сужение функции $\mu^*$ на $\mathcal{A}^*$ есть $\sigma$-аддитивная мера, совпадающая с $\mu$ на $\mathcal{A}$.*

*Это сужение называется* лебеговским продолжением меры *$\mu$ и тоже обозначается $\mu$.*

**Определения 5**. 1) Тройка $(X, \mathcal{B}, \mu)$, где $\mu$ — мера, определенная на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$, называется *пространством с мерой.*

2) В случае, когда $\mu(X) = 1$, мера $\mu$ называется *вероятностной*, а пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ — *вероятностным пространством.*

3) Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}|_E := \{A \subset E : A \in \mathcal{B}\}, \mu|_E(A) := \mu(A)$ при $A \in \mathcal{B}|_E$. Тогда пространство с мерой $(E, \mathcal{B}|_E, \mu|_E)$ называется *подпространством пространства* $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

**Определение 6**. Мера $\mu$ называется *полной*, если из того, что $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$, следует, что любое подмножество $A$ множества $N$ тоже принадлежит $\mathcal{B}$ (и, стало быть, $\mu(A) = 0$).

**Упражнение 2***. Лебеговское продолжение любой меры полно. Докажите.

**Резюме**. Таким образом, всякая мера $\mu$, заданная первоначально на полуалгебре $\mathcal{S}$ подмножеств множества $X$, может быть единственным образом продолжена на $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}^*$ всех $\mu^*$-измеримых множеств, и это продолжение полно.

## §4. Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой

В этом параграфе будет рассмотрен важный случай мер на числовой прямой.

**Определение 1**. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. *Мера Лебега-Стилтьеса* определяется на полуалгебре стрелок равенством

$$m_F([a,b)) = F(b) - F(a),\ m_F((-\infty,b)) = F(b) - F(-\infty).$$

При этом $F$ называется *функцией распределения меры* $m_F$ (или производящей функцией).

Ясно, что $m_F$ при $F(x) = x$ есть мера Лебега $m$ на прямой.

**Упражнение 1**. Докажите, что $m_F$ — конечно-аддитивная мера, а потому обладает свойством конечной полуаддитивности:

если $[a,b) = \bigcup_{j=1}^{n}[a_j,b_j)$, то

$$m_F([a,b)) \leq \sum_{j=1}^{n} m_F([a_j,b_j)).$$

**Теорема 1** (о $\sigma$-аддитивности меры Лебега-Стилтьеса). *Мера $m_F$ $\sigma$-аддитивна тогда и только тогда, когда ее функция распределения $F$ непрерывна слева.*

**Следствие 1**. *Мера Лебега $\sigma$-аддитивна.*

**Определение 2**. Лебеговское продолжение меры $m_F$ (меры $m$) также называется мерой Лебега-Стилтьеса (соответственно, мерой Лебега) и обозначается $m_F$ (соответственно, $m$).

**Определение 3**. $m^*$-измеримые множества называются *измеримыми по Лебегу*.

**Упражнения 2**. Докажите следующие утверждения.

1)* Любое одноточечное подмножество числовой прямой $m_F$-измеримо.

2) Мера Лебега счетного подмножества числовой прямой равна нулю.

3) $m_F((a,b)) = F(b) - F(a+0)$, $m_F([a,b]) = F(b+0) - F(a)$, $m_F((a,b]) = F(b+0) - F(a+0)$.

4) Мера $m_F$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна функция $F$ (мера называется непрерывной, если мера каждого одноточечного подмножества равна нулю).

Любопытно, что обращение второго утверждения предыдущего упражнения неверно. Множество, доставляющее соответствующий пример («канторовское множество»), которое мы сейчас построим, представляет общематематический интерес.

**Пример 1**. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$ на три равные части точками $1/3$ и $2/3$ и обозначим через $C_1$ множество $[0,1/3] \sqcup [2/3,1]$, получающееся из $[0,1]$ удалением среднего интервала $(1/3, 2/3)$ длины $1/3$. Получим замкнутое множество с $m(C_1) = 2/3$. Аналогично поступая с отрезками $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$, получаем замкнутое множество $C_2$ с $m(C_2) = (2/3)^2$ и т. д. В результате будем иметь убывающую последовательность замкнутых множеств $C_n$ с $m(C_n) = (2/3)^n$. По определению *канторовское множество* $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Оно получается из $[0,1]$ удалением последовательности интервалов $(1/3,2/3)$, $(1/9,2/9)$ и $(7/9,8/9)$ и т. д. (их называют *смежными* для $C$). Ясно, что

$$m(C) = \lim_n m(C_n) = \lim_n (2/3)^n = 0.$$

Покажем, что $C$ имеет мощность континуума. Каждое число $x \in [0,1]$ может быть записано в троичной системе счисления, т. е. имеет разложение вида

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}, \tag{4.1}$$

где $a_j \in \{0,1,2\}$. Это представление (как и двоичное, десятичное и т. д.) не всегда однозначно. А именно, число, для которого $a_{n-1} < 2$, $a_n = a_{n+1} = \ldots = 2$ (т. е. с 2 в периоде), равно числу, у которого $a_n = a_{n+1} = \ldots = 0$ (т. е. с 0 в периоде), а $a_{n-1}$ увеличено на единицу (концы смежных интервалов являются такими числами). Условимся в таких случаях всегда рассматривать разложения с «хвостом двоек» (т. е. с 2 в периоде). Тогда $a_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in (1/3, 2/3)$; $a_1 \neq 1$, $a_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in (1/9,2/9) \cup (7/9,8/9)$, и т. д. (проверьте!). Поэтому канторовское множество состоит из тех $x \in [0,1]$, которые имеют троичное разложение (4.1) с $a_j \in \{0,2\}$ при всех $j$. Положим

$x_j = a_j/2$ и рассмотрим отображение

$$\varphi : C \to [0,1] : x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}.$$

Оно сюръективно (каждое число из $[0,1]$ допускает подобное двоичное разложение). Значит, по лемме о сравнении мощностей (см. главу 1) $|C| \geq \mathfrak{c}$. Поскольку обратное неравенство очевидно, наше утверждение доказано.

Рассмотрим отображение $\varphi$ более подробно. Заметим, что если $x$ и $y$ имеют троичные разложения $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ и $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}$, то $x < y$ тогда и только тогда, когда $a_j = b_j$ для $j < n$ и $a_n < b_n$ при некотором $n$. Поэтому, если точки $x, y \in C$ не являются концами смежных интервалов, то из $x < y$ следует $\varphi(x) < \varphi(y)$. Другими словами, $\varphi$ монотонно возрастает на множестве $C$, из которого удалены концы смежных интервалов, т. е. точки вида $p3^{-k}$. Если же $x, y \in C$ являются концами некоторого смежного интервала, то $\varphi(x) = \varphi(y)$, так как являются двумя двоичными разложениями одного и того же числа вида $q2^{-j}$. Продолжим $\varphi$ до отображения всего отрезка $[0,1]$ на себя, полагая $\varphi$ на каждом смежном интервале постоянным и равным значению на его концах. Возникающая в результате функция $\varphi$ (*функция Кантора*) будет неубывающей. А так как множество ее значений есть весь отрезок $[0,1]$, — то и непрерывной (она не имеет скачков, а других точек разрыва у монотонной функции быть не может). График функции $\varphi$ иногда называют *канторовской лестницей*.

**Упражнение 3**. Постройте канторовскую лестницу на нескольких смежных интервалах.

**Замечания**. 1) Каждая из мер $m_F$ определена, вообще говоря, на своей $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$, зависящей от $F$ (при $F(x) = x$ будем писать $\mathcal{A}^*(\mathbb{R})$ вместо $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$). Вместе с тем, поскольку система $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$ содержит все стрелки, она, будучи $\sigma$-алгеброй, содержит и все борелевские множества (проверьте), которые, таким образом, оказываются «универсально измеримыми». Поэтому часто мерой Лебега-Стилтьеса называют сужение $m_F$ на $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

2) Меры, определенные на $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, называют *борелевскими* (на прямой; аналогично определяется борелевская мера на промежутке). Любая борелевская мера $\mu$ на $\mathbb{R}$ имеет вид $m_F$, где $F(x) = \mu([0,x))$, если $x \geq 0$, $F(x) = -\mu([x,0))$, если $x < 0$; для конечной меры $\mu$ можно взять $F(x) = \mu((-\infty, x))$ (упражнение).

3) Если неубывающая непрерывная слева функция $F$ определена лишь на промежутке $I = [a, b)$, то, дословно повторяя предыдущие рассуждения, мы получим меру Лебега-Стилтьеса на $I$.

**Пример 1.** Дж. Витали показал (используя аксиому выбора), что существуют не $m^*$-измеримые множества. Отсюда, в частности, следует, что функция $m^*$ не является аддитивной на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Конструкция Витали вкратце такова. Два числа из отрезка $I = [0, 1]$ назовем эквивалентными, если их разность рациональна. Образуем множество $V$, выбрав из каждого класса эквивалентности по одному элементу. Если $\{q_n\} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, то легко проверить (проверьте), что

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_n (q_n + V) \subset [-1, 2].$$

Если бы множество $V$ было $m^*$-измеримо, то из левого включения следовало бы, что оно имеет положительную меру (в противном случае $1 = m([0, 1]) \le \sum_n m(q_n + V) = 0$). Но тогда $3 = m([-1, 2]) \ge \sum_n m(q_n + V) = \infty$, — противоречие. Здесь мы воспользовались первым утверждением следующего упражнения.

**Упражнение 4***. Докажите, что для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}$ и чисел $x, \lambda \in \mathbb{R}$ множества $x + A := \{x + a : a \in A\}$ и $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$ тоже измеримы по Лебегу и справедливы равенства $m(x + A) = m(A), m(\lambda A) = |\lambda| m(A)$. Первое из этих равенств выражает свойство *трансляционной инвариантности* меры Лебега.

**Пример 2**. Найдем меру Лебега множества $A$ тех точек интервала $(0; 1)$, в десятичной записи которых цифра тысячных не равна нулю. Каждое число $x \in A'$ имеет вид $x = 0, x_1 x_2 0 x_3 \ldots = 0, x_1 x_2 + 0,000 x_3 \ldots$. При этом множество $B = \{0, x_1 x_2 : x_{1,2} = 0, \ldots, 9\}$, образованное первыми слагаемыми, состоит из 100 элементов, а множество, образованное вторыми слагаемыми, есть $\{0,000 x_3 \ldots \in (0; 1) : x_i = 0, \ldots, 9\} = (0; 0,001)$. Таким образом, $A' = \sqcup_{y \in B}(y + (0; 0,001))$. Пользуясь аддитивностью и трансляционной инвариантностью меры Лебега, получаем теперь, что $m(A') = 100 \cdot 0,001 = 0,1,\ m(A) = 1 - m(A') = 0,9$.

**Упражнение 5***. Постройте меру Лебега на единичной окружности по аналогии с построением меры Лебега на прямой.

**Упражнение 6.*** Пусть $\mu$ — конечная непрерывная мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mu$ принимает все значения из $[0, \mu(\mathbb{R})]$.

В заключение рассмотрим несколько важных примеров мер на прямой.

**Пример 4.** Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — возрастающая последовательность точек промежутка $[a, b)$, а числа $p_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Легко проверить, что функция $H(x) := \sum_{k, x_k < x} p_k$ не убывает и непрерывна слева (функции такого типа называются *функциями скачков*). При этом мера, определяемая на полуалгебре стрелок, содержащихся в $[a, b)$, равенством

$$\mu_H([\alpha, \beta)) = H(\beta) - H(\alpha) = \sum_{k, x_k \in [\alpha, \beta)} p_k,$$

есть дискретная мера на $[a, b)$.

Класс мер Лебега-Стилтьеса, в некотором смысле противоположный предыдущему, доставляет следующий

**Пример 5.** Пусть функция $p$ непрерывна на $[a, b)$. Как показывает формула Ньютона-Лейбница, функция множеств, определяемая на полуалгебре стрелок, содержащихся в $[a, b)$, с помощью интеграла Римана

$$\mu([\alpha, \beta)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x) dx,$$

есть $m_F$, где $F(x) = \int_\alpha^x p(t) dt$ (проверьте).

**Замечание.** Это частный случай меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Общий случай будет рассмотрен в следующей главе.

# Глава 3. Интеграл Лебега

В данной главе будет определен интеграл Лебега и установлены его основные свойства.

### §1. Измеримые функции

Прежде чем переходить к построению интеграла Лебега, выясним, какие функции мы будем интегрировать.

Всюду ниже $(X, \mathcal{B}, \mu)$ есть пространство с $\sigma$-конечной мерой (модельный пример — пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*(\mathbb{R}), m)$). Множества из $\mathcal{B}$ будем называть *$\mu$-измеримыми* (измеримыми, если ясно, о какой мере идет речь). Для функции $f : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ через $X(f < c)$ будем обозначать множество $\{x \in X : f(x) < c\}$. Другими словами, $X(f < c) = f^{-1}((-\infty, c))$. Аналогичный смысл имеют выражения $X(f > c)$, $X(f \leq c)$ и т. д.

**Определение 1**. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *$\mu$-измеримой* (измеримой, если ясно, о какой мере идет речь), если $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

*Если $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, то измеримая функция на нем называется случайной величиной*.

**Определение 2**. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *борелевской*, если $X(f < c) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

**Упражнение 1**. Докажите, что

1) постоянная функция измерима;

2) непрерывная функция на прямой является борелевской;

3)* функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет борелевской тогда и только тогда, когда прообраз (при отображении $f$) любого борелевского множества является борелевским множеством.

**Теорема 1** (о равносильных определениях измеримости). *Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ следующие утверждения равносильны:*

*1) $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*2) $X(f \leq c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*3) $X(f > c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*4) $X(f \geq c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.*

Доказательство проводится по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Например, докажем, что $1 \Rightarrow 2$. Для этого заметим, что $(f(x) \leq c) \iff (\forall n \in \mathbb{N}\ f(x) < c + 1/n)$. Следовательно,

$$X(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(f < c + 1/n) \in \mathcal{B}.$$

**Следствие 1**. *Если функция $f$ измерима, то измеримы также и все множества вида $X(a < f < b)$, $X(a \leq f \leq b)$, $X(a \leq f < b)$, $X(a < f \leq b)$, $X(f = b)$.*

**Упражнение 2.*** Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ $\mu$-измерима. Докажите, что прообраз $f^{-1}(B)$ борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ есть $\mu$-измеримое множество.

Класс измеримых функций, как правило, очень широк, в чем нас убеждают следующие результаты.

**Теорема 2** (о сохранении измеримости при композиции с непрерывной функцией). *Если $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, функция $F : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функции $f, g$ измеримы на $X$, причем $(f(x), g(x)) \in \Omega$ при каждом $x \in X$, то на $X$ измерима также и функция $F(f, g)$.*

**Следствия 2**. 1) (Сохранение измеримости при арифметических операциях над функциями.) *Семейство измеримых на $X$ функций образует алгебру относительно поточечных операций сложения и умножения функций, а также умножения функции на число.*

2) *Если функции $f, g$ измеримы, то измеримы также и функции* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$. *В частности,*

3) *измеримы функции $f^+ := \max\{f, 0\}$ и $f^- := -\min\{f, 0\}$* (положительная и отрицательная части $f$)*, а также функция $|f| = f^+ + f^-$.*

**Упражнения 3**. 1) Докажите, что частное двух измеримых функций также есть измеримая функция при условии, что знаменатель нигде не обращается в нуль.

2)* Пусть функция $f$ измерима. Докажите, что композиция $D \circ f$, где $D$ — функция Дирихле, тоже измерима.

3)* Пусть функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевские. Докажите, что композиция $f \circ \varphi$ тоже есть борелевская функция (а потому $m$-измерима).

**Теорема 3** (о сохранении измеримости при предельном переходе). *Если $(f_n)$ — последовательность функций, измеримых на $X$, то изме-*

*римы также функции*

$$g_1 = \sup_n f_n,\ \ g_2 = \inf_n f_n,\ \ g_3 = \limsup_n f_n,\ \ g_4 = \liminf_n f_n.$$

*В частности, измерима функция $g = \lim_n f_n$, если предел существует.*

**Упражнение 4**. Докажите, что производная дифференцируемой на некотором интервале числовой прямой функции измерима по Лебегу на этом интервале.

Выделим следующий важный класс измеримых функций.

**Определение 3**. Функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она измерима и множество ее значений конечно.

Важным примером простой функции является *индикатор множества* $A \subset X$ (характеристическая функция $A$), определяемый равенством

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(индикатор пустого множества считается равным нулю).

**Упражнения 5**. Докажите

1) простоту индикатора измеримого множества;
2) равенство $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$;
3) равенство $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A \triangle B}$;
4) импликацию $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \chi_A + \chi_B = \chi_{A \sqcup B}$;
5) импликацию $A \supset B \Rightarrow \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$;
6) импликацию $A_n \uparrow A \Rightarrow \chi_A = \lim_n \chi_{A_n}$.

**Лемма 1** (о каноническом представлении простой функции). *Любая простая функция единственным образом представляется в виде*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \tag{1.1}$$

*где числа $a_i$ попарно различны, $A_i \in \mathcal{B}$, $X = \sqcup_{i=1}^n A_i$.*

**Упражнения 6**. Докажите, что

1) простые функции образуют алгебру относительно поточечных операций сложения и умножения функций, а также умножения функции на число;

2) линейная комбинация индикаторов $\sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, где числа $b_i$ попарно различны, а множества $B_i \subset X$ попарно не пересекаются, является простой функцией тогда и только тогда, когда $B_i \in \mathcal{B}$;

2) функция $\max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ является простой вместе с $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Следующая теорема будет для нас служить основой всей теории интегрирования по Лебегу.

**Теорема 4** (об аппроксимации измеримых функций простыми). *Для любой неотрицательной измеримой функции $f$ на $X$ существует такая последовательность неотрицательных простых функций $\varphi_n^f$, что $\varphi_n^f(x) \uparrow f(x)$ поточечно на $X$.*

**Упражнение 7**. Докажите, что построенная выше последовательность $\varphi_n^f$ простых функций сходится к $f$ равномерно, если $f$ ограничена.

**Определение 4**. Говорят, что некоторое свойство выполняется на $X$ *$\mu$-почти всюду* (сокращенно $\mu$-п.в.), если оно не выполняется лишь на множестве меры нуль.

В частности,

- говорят, что функции $f, g$ на $X$ *равны $\mu$-п.в.* (и пишут $f = g$ $\mu$-п.в.), если $\mu(X(f \neq g)) = 0$;

- говорят, что последовательность $f_n$ функций на $X$ *сходится к $f$ $\mu$-п.в.* (и пишут $f_n \to f \mu$-п.в.), если $\mu(X(f_n \not\to f)) = 0$.

**Упражнения 8**. Пусть $\mu$ – полная мера. Докажите следующие утверждения:

1)* если $f = g$ $\mu$-п.в., а функция $f$ измерима, то функция $g$ тоже измерима;

2)* если $f_n \to f \mu$-п.в., а функции $f_n$ измеримы, то функция $f$ тоже измерима.

Представляет интерес также следующий тип сходимости последовательности измеримых функций.

**Определение 5**. Говорят, что последовательность $f_n$ измеримых функций на $X$ *сходится к $f$ по мере* (и пишут $f_n \to f$ по мере $\mu$, а также $f_n \xrightarrow{\mu} f$), если $\forall \varepsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| \geq \varepsilon)) \to 0$ $(n \to \infty)$.

*В случае вероятностной меры вместо сходимости по мере говорят о *сходимости по вероятности.**

Между различными типами сходимости существуют интересные связи, из которых мы отметим следующие.

**Теорема 5** (теорема Егорова). *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если последовательность измеримых на $X$ функций $f_n \to f \mu$-п.в., то для любого положительного $\varepsilon$ найдется такое измеримое $E_\varepsilon \subset X$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, что $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $E'_\varepsilon$.*

**Упражнение 9***. Докажите утверждение, обратное теореме Егорова.

Из теоремы Егорова легко вытекает

**Следствие 3**. *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если $f_n \to f$ $\mu$-п.в., то $f_n \to f$ по мере $\mu$.*

**Замечание**. Утверждение, обратное следствию 3, неверно. Но можно показать, что если последовательность $f_n \to f$ по мере $\mu$, то у нее существует подпоследовательность, сходящаяся $\mu$-п.в. к функции $f$.

**Замечание**. Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями в расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ (т. е. принимающая, возможно, и бесконечные значения) называется *измеримой*, если, в дополнение к условию $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$, выполняются также условия $X(f = +\infty) \in \mathcal{B},\ X(f = -\infty) \in \mathcal{B}$.

Значительная часть доказанных выше теорем переносится и на такие функции (проверьте).

Всюду далее, если не оговорено противное, все функции будут считаться измеримыми.

## §2. Интеграл Лебега

Мы определим интеграл Лебега в три этапа.

### 2.1. Интегрирование неотрицательных простых функций

В этом разделе будут рассматриваться функции, у которых интегралы выражаются конечными суммами.

**Определение 1**. Пусть $\varphi$ — неотрицательная простая функция на $X$ с каноническим представлением

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

*Интеграл Лебега функции* $\varphi$ определяется равенством

$$\int\limits_X \varphi(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{2.1}$$

(как обычно, мы считаем, что $0 \cdot (+\infty) := 0$, $c \cdot (+\infty) := +\infty$, если $c > 0$, $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$, так что интеграл может равняться $+\infty$).

Используются также обозначения $\int_X \varphi d\mu$, $\int_X \varphi(x)\mu(dx)$.

**Упражнение 1**. Докажите, что равенство (2.1) сохраняется и тогда, когда числа $a_i$ в представлении функции $\varphi$ не являются попарно различными.

Предыдущее определение обобщается следующим образом.

**Определение 2**. Пусть $\varphi$ — неотрицательная простая функция на $X$ с каноническим представлением

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

*Интеграл Лебега функции $\varphi$ по множеству $E \in \mathcal{B}$* определяется равенством

$$\int_E \varphi d\mu = \int_X \varphi \chi_E d\mu.$$

В теории Лебега интегралы от простых функций играют роль интегральных сумм.

**Теорема 1** (свойства интеграла от неотрицательных простых функций). *Если функции $\varphi$, $\psi$ неотрицательные простые, $c \geq 0$, то*

*1) $\int\limits_X c\varphi(x)d\mu(x) = c\int\limits_X \varphi(x)d\mu(x)$,*

*$\int\limits_X(\varphi+\psi)d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \psi d\mu$ (положительная линейность);*

*2) $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int\limits_X \varphi d\mu \leq \int\limits_X \psi d\mu$ (монотонность);*

*3) $\nu(E) := \int\limits_E \varphi d\mu$ есть мера на $\mathcal{B}$ ($\sigma$-аддитивность).*

При определении интеграла от функций общего вида далее отдельно будут рассмотрены случаи неотрицательных и знакопеременных функций (и это не удивительно, так как уже на примере интеграла Римана видно, что интегралы от функций этих классов имеют разный геометрический смысл).

### 2.2. Интегрирование неотрицательных измеримых функций

**Определение 3**. Пусть $f$ есть неотрицательная измеримая функция на $X$ (принимающая, возможно, значение $+\infty$), а $\varphi_n^f$ — последовательность простых функций, построенная при доказательстве теоремы об аппроксимации функции $f$ простыми. *Интегральные суммы Лебега* функции $f$ определим следующим образом:

$$S_n(f) = \int\limits_X \varphi_n^f d\mu.$$

**Определение 4**. *Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции* $f$ на $X$ (принимающей, возможно, значение $+\infty$) определим как предел интегральных сумм:

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

(используются также обозначения $\int_X f(x) d\mu(x)$, $\int_X f(x)\mu(dx)$). Ясно, что предел (конечный или бесконечный) всегда существует в силу монотонности последовательности интегралов, выражающих интегральные суммы.

Кроме того, это определение согласовано с определением интеграла от неотрицательной простой функции. В самом деле, пусть $f$ есть неотрицательная простая функция с каноническим представлением $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$. По определению $\varphi_n^f|_{A_i} = k(n,i)/n$, где $k(n,i)/n \le a_i < (k(n,i)+1)/n$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n^f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^N \frac{k(n,i)}{n}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i).$$

Положим также

$$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_X f\chi_E d\mu \ (E \in \mathcal{B}).$$

**Определение 5**. Если $\int_E f d\mu < \infty$, то (неотрицательную) функцию $f$ называют *интегрируемой по Лебегу (суммируемой)* на множестве $E$.

Нам понадобятся следующие свойства введенного интеграла.

**Лемма 1**. *Если функции $f$, $g$ неотрицательны, а $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, то*
*1) $f \le g \Rightarrow \int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu$ (монотонность);*
*2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \int\limits_{E_1} f d\mu \le \int\limits_{E_2} f d\mu$.*

Следующая теорема о предельном переходе под знаком интеграла очень полезна. В частности, из нее будет следовать положительная линейность интеграла от неотрицательных функций.

**Теорема 2** (теорема Б. Леви, или теорема о монотонной сходимости). *Если функции $f_n$ неотрицательны, и $f_n(x) \uparrow f(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu(x) = \int\limits_X f(x)d\mu(x).$$

**Упражнение 2**. Докажите, что в теореме Б. Леви условие монотонности нельзя отбросить.

Из теоремы Б. Леви вытекает более удобное определение интеграла от неотрицательной функции.

**Следствие 1**. *Пусть функция $f$ неотрицательна, и $\varphi_n$ — такая последовательность неотрицательных простых функций, что $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)d\mu(x).$$

**Следствие 2** (о положительной линейности интеграла от неотрицательной функции). *Для любых неотрицательных измеримых на $X$ функций $u_1$, $u_2$ и неотрицательных чисел $c_1$ и $c_2$*

$$\int\limits_X (c_1u_1(x) + c_2u_2(x))d\mu(x) = c_1 \int\limits_X u_1(x)d\mu(x) + c_2 \int\limits_X u_2(x)d\mu(x).$$

Сформулируем теорему Б. Леви на языке рядов.

**Теорема 3** (теорема Б. Леви об интегрировании суммы ряда). *Если функции $u_n$ неотрицательны и измеримы на $X$, то*

$$\int\limits_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n(x)d\mu(x).$$

Сформулируем еще одну теорему о предельном переходе под знаком интеграла.

**Теорема 4** (лемма Фату). *Если функции $f_n$ неотрицательны и измеримы на $X$, то*

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \geq \int\limits_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu.$$

Следующий результат может применяться для доказательства интегрируемости предела функциональной последовательности.

**Следствие 3**. *Если функции $f_n$ неотрицательны и интегрируемы на $X$, причем $f_n \to f$ п. в. и*

$$c = \sup_n \int\limits_X f_n d\mu < \infty,$$

*то функция $f$ интегрируема и $\int_X f d\mu \leq c$.*

**Упражнение 3**. Покажите на примере, что в утверждении леммы Фату может иметь место строгое неравенство.

**Замечания**. 1) В теоремах Б. Леви и лемме Фату условие неотрицательности функций можно заменить на неотрицательность почти всюду. Это легко следует из того, что интегралы от функций, равных почти всюду, совпадают (см. ниже следствие 2 неравенства Чебышева).

2) Часто интеграл Лебега от неотрицательной функции $f$ определяют как супремум интегралов от не превосходящих $f$ неотрицательных простых функций (см., например, [10]), а принятое в данных лекциях определение становится тогда следствием теоремы Б. Леви. Давая наше определение, мы хотели подчеркнуть, что эвристический принцип «интеграл — это предел интегральных сумм» справедлив и для интеграла Лебега.

### 2.3. Интегрирование знакопеременных измеримых функций

Напомним, что положительная и отрицательная части функции $f$ определяются равенствами $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$. Очевидно, что $f = f^+ - f^-$.

**Определение 6**. Измеримая функция $f$ на $X$ (принимающая, возможно, значение $+\infty$) называется *интегрируемой по Лебегу (суммируемой)* на $X$, если ее положительная и отрицательная части интегрируемы, т. е. $\int_X f^{\pm} d\mu < \infty$. В этом случае ее интеграл определяется равенством

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu.$$

Поскольку каждое измеримое подмножество $E$ пространства $X$ само является пространством с мерой, можно говорить и о функциях, интегрируемых на множестве $E$.

*Если $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, а $f$ — случайная величина на $\Omega$, то интеграл $Ef := \int_\Omega f dP$ называется ее математическим ожиданием.*

Множество всех интегрируемых по Лебегу на $E$ функций обозначается $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ (вместо $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ пишут еще $\mathcal{L}^1(\mu)$).

В случае, когда $E$ есть промежуток числовой прямой с концами $a$ и $b$, интеграл относительно меры Лебега $m$ по множеству $E$ обозначается $\int_a^b f(x)dx$, (или $(L)\int_a^b f(x)dx$, если хотят подчеркнуть, что речь идет именно об интеграле Лебега), а множество всех интегрируемых относительно меры Лебега на $E$ функций обозначается $\mathcal{L}^1(E)$ (например, $\mathcal{L}^1[a, b]$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$).

**Упражнение 4***. Пусть мера $\mu$ полна, $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$. Докажите, что любая функция $h : N \to \mathbb{R}$ интегрируема на $N$ и $\int_N h d\mu = 0$.

**Упражнение 5***. Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ справедливо тождество (называемое *трансляционной инвариантностью интеграла*)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y) dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dm(x) \ (y \in \mathbb{R}).$$

**Теорема 5** (теорема о линейности интеграла). *Множество $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ относительно поточечного сложения функций и умножения их на скаляр является векторным пространством, и интеграл на нем обладает свойством линейности, а именно,*

$$\int\limits_X (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) d\mu(x) = c_1 \int\limits_X f_1(x) d\mu(x) + c_2 \int\limits_X f_2(x) d\mu(x)$$

*для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ и любых чисел $c_1, c_2$.*

Нам потребуются следующие свойства интеграла.

**Свойство 1** (свойство абсолютности интеграла Лебега). *Функция $f$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ одновременно со своим модулем.*

**Упражнение 6**. Докажите, что интеграл Римана не обладает свойством абсолютности.

Имеют место также следующие важные свойства интеграла Лебега.

**Свойство 2** (свойство монотонности интеграла). *Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы и $f \leq g$. Тогда $\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$.*

**Свойство 3**. *Если $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, то $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$.*

**Свойство 4** (признак сравнения). *Пусть функция $g$ неотрицательна и интегрируема на $X$, а измеримая на $X$ функция $f$ удовлетворяет неравенству $|f| \leq g$. Тогда функция $f$ тоже интегрируема на $X$.*

**Упражнение 7**. Докажите, что аналогичный признак сравнения для интеграла Римана неверен.

**Свойство 5** (достаточное условие интегрируемости). *Если $\mu(X) < \infty$, а функция $f$ измерима и ограничена, $|f(x)| \leq M$, то $f$ интегрируема на $X$, и справедлива оценка $|\int_X f d\mu| \leq M\mu(X)$.*

**Свойство 6** (неравенство Чебышева). *Для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и числа $c > 0$ справедливо неравенство*

$$\mu(X(|f| \geq c)) \leq \frac{1}{c} \int\limits_X |f| d\mu.$$

**Следствие 4**. $\int\limits_X |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п. в.

**Следствие 5** (теорема об эквивалентных функциях). Если $f = g$ $\mu$-п. в., то $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

**Замечание.** Иногда функции $f$ и $g$, которые равны $\mu$-п. в., называют ($\mu$-)*эквивалентными*, а множества нулевой ($\mu$-)меры — ($\mu$)-*пренебрежимыми*, поскольку в вопросах ($\mu$-)измеримости и интегрирования (по мере $\mu$) этими множествами можно пренебречь (см., например, теорему об эквивалентных функциях, установленную выше).

**Пример 1**. Вычислим $\int_{\mathbb{R}} D(\cos x) dm(x)$, где $D$ — функция Дирихле. По определению функции Дирихле, $D(\cos x) = 1$, если $\cos x \in \mathbb{Q}$, и $= 0$, если $\cos x \notin \mathbb{Q}$. Но множество $\{x : \cos x \in \mathbb{Q}\}$ счетно как объединение счетного числа счетных множеств. Следовательно, $D(\cos x) = 0$ п. в., а потому $\int_{\mathbb{R}} D(\cos x) dm(x) = 0$.

**Замечание**. Если функция $f$ задана лишь $\mu$-п. в., то мы можем считать ее продолженной на все множество $X$. По следствию 2 интеграл от продолженной функции не зависит от способа продолжения.

**Упражнения 8**. 1) Докажите, что любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере Дирака $\delta_a$ ($a \in X$) (см. пример 1 в главе 2) и вычислите $\int_X f d\delta_a$.

2)* Пусть $\mu$ — дискретная мера (см. пример 2 в главе 2). Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ справедливо равенство

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_n f(x_n) p_n.$$

**Упражнения 9**. Докажите, что

1)* если функция $f > 0$ на множестве $E$ положительной меры, то $\int_E f d\mu > 0$;

2)* если $\int_E f d\mu \geq 0$ для любого измеримого множества $E$, то $f \geq 0$ $\mu$-п. в.

**Упражнение 10***. Пусть мера $\mu$ конечна, а множество $X$ есть объединение трех измеримых множеств $A, B, C$, причем каждая точка из $X$ принадлежит ровно двум из них. Докажите, что

$$\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) = 2\mu(X).$$

**Замечание**. Интеграл Лебега комплекснозначной функции $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ определяется по линейности. При этом все свойства интеграла, приведенные выше и выраженные равенствами, а также неравенствами, содержащими лишь модули, сохраняются (проверьте).

В дальнейшем мы примем следующее соглашение. Если функция $f$ определена лишь на измеримом подмножестве $E$ пространства $X$ с мерой $\mu$, то будем считать ее равной нулю на $X \setminus E$. При этом $\int_X f d\mu = \int_E f d\mu$ (если интеграл существует), и большинство результатов, сформулированных ниже для $\int_X f d\mu$, легко переносятся на случай интегралов по подмножествам (разумеется, это не относится к теоремам, где речь идет о той или иной зависимости интегралов от множеств, по которым ведется интегрирование).

## §3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла утверждают, если мы положим $I(f) = \int\limits_X f d\mu$, что соотношение $f_n \to f$ при определенных условиях влечет соотношение $I(f_n) \to I(f)$. Таким образом, каждая из них выражает некоторое свойство непрерывности отображения $I$, чем и объясняется их важность в теории интеграла.

Сначала заметим, что теореме Б. Леви можно придать следующую форму.

**Теорема 1** (теорема Б. Леви для интегрируемых функций). *Если $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, причем последовательность $f_n$ сходится к функции $f$ не убывая и*

$$\sup_n \int\limits_X f_n d\mu < \infty,$$

*то $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$* и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

**Упражнение 1.** Сформулируйте и докажите аналог предыдущей теоремы для невозрастающей последовательности.

Следующий результат является одним из важнейших в теории интеграла.

**Теорема 2** (теорема Лебега о мажорированной сходимости). *Пусть функции $f_n$ на $X$ $\mu$-измеримы, причем $|f_n| \leq g$ при всех $n$ для некоторой $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Если $f_n \to f$ п. в., то $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

**Замечание**. Теоремы Лебега и Б. Леви не верны для интеграла Римана, так как предельная функция может быть не интегрируема по Риману, хотя все $f_n$ интегрируемы. Для построения соответствующего примера можно рассмотреть отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега и в качестве $f_n$ взять индикатор множества $\{q_1, \ldots, q_n\}$, где счетное множество $\{q_n : n = 1, 2, ...\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Читателю предлагается закончить это рассуждение.

**Следствие 1**. *Пусть* $\mu(X) < \infty$. *Если* $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *и* $f_n \to f$ *равномерно на* $X$, *то* $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu(x) = \int\limits_X f(x)d\mu(x).$$

**Следствие 2** ( теорема о $\sigma$-аддитивности интеграла Лебега). *Если* $E_n \in \mathcal{B},\ E = \sqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *то для любой функции* $f \in \mathcal{L}^1(E,\mu)$

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu.$$

**Теорема 3** (теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). *Пусть* $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любого измеримого множества* $E$ *с* $\mu(E) < \delta$ *выполняется неравенство* $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$.

**Теорема 4** (теорема Лебега об интегрировании суммы ряда). *Если* $u_n \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |u_n| d\mu < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится п. в. к интегрируемой функции* $S$ *и*

$$\int\limits_X S d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n d\mu.$$

**Упражнения 2**. 1) Представьте сумму абсолютно сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в виде $\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x)dm(x)$, где $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Найдите

а)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx$,

б)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)\mathrm{sin} nx dx$.

3)* Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности интеграла Лебега, зависящего от параметра.

4)* Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} (1 + x/n)^{-n} \sin(x/n) dx$.

### §4. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Интегралы Лебега и Римана согласованы в следующем смысле.

**Теорема 1** (о сравнении интеграла Лебега с собственным интегралом Римана). *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то $f \in \mathcal{L}^1[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dm(x)$.*

Доказанная теорема показывают, что интеграл Римана поглощается интегралом Лебега. Поэтому вместо $\int_{[a,b]} f(x)dm(x)$, как правило, пишут $\int_a^b f(x)dx$.

**Теорема 2** (критерий Лебега интегрируемости по Риману). *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена, и мера множества ее точек разрыва равна нулю.*

**Теорема 3** (теорема о сравнении интеграла Лебега с несобственным интегралом Римана). *Пусть $I$ — (конечный или бесконечный) промежуток числовой прямой. Если несобственный интеграл Римана $\int_I f(x)dx$ сходится абсолютно, то $f \in \mathcal{L}^1(I)$ и $\int_I f(x)dx = \int_I f(x)dm(x)$.*

**Замечание**. Теорема, аналогичная предыдущей, для условно сходящегося несобственного интеграла неверна. Например, интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$, где $f = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \chi_{[n,n+1)}$, существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$ не существует в смысле Лебега (воспользуйтесь свойством абсолютности). Таким образом, интеграл Лебега на прямой не поглощает условно сходящийся несобственный интеграл Римана.

**Упражнение 2**. Покажите, что произведение двух интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией, но оно интегрируемо, если одна из функцией является измеримой и ограниченной. (Другое достаточное условие интегрируемости произведения дает неравенство Гёльдера, см. ниже §7).

## §5. Интеграл Стилтьеса

**Определение 1**. Пусть функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывает и непрерывна слева, $m_F$ — мера Лебега-Стилтьеса с функцией распределения $F$. Тогда интеграл $\int_A f dm_F$, ($A \subset [a, b]$ — борелевское множество) называется *интегралом Лебега-Стилтьеса* и обозначается

$$\int\limits_A f dF$$

(в этом контексте функцию $F$ иногда называют *интегрирующей*).

Это понятие обобщается на случай интегрирующих функций ограниченной вариации.

**Определение 2**. Пусть функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ положим

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})|.$$

Функцию $F$ будем называть *функцией ограниченной вариации* (или функцией с ограниченным полным изменением) на $[a, b]$, если числа $S(P)$ ограничены в совокупности. В этом случае число

$$V_a^b(F) = \sup_P S(P)$$

называют *вариацией* (полным изменением) функции $F$ на $[a, b]$.

Класс таких функций обозначим $BV[a, b]$.

**Упражнения 1**. Докажите, что

1) $V_a^b(f + g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$;

2) $BV[a, b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями);

3)* $V_a^b(f) = V_a^d(f) + V_d^b(f)$ $(a < d < b)$ (*аддитивность вариации*).

По *теореме Жордана* класс $BV[a, b]$ совпадает с классом функций, представимых в виде $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i$ определены на $[a, b]$ и не убывают (*разложение Жордана функции* $F$).

**Упражнение 2***. Проверьте, что функция $f(x) = \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ не принадлежит $BV[0, 1]$, но *на интервале* $(0, 1)$ может быть представлена в виде разности двух возрастающих функций.

**Определение 3**. Если интегрирующая функция представима в виде $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i$ не убывают и непрерывны слева на $[a, b]$, то по определению полагают

$$\int_A f dF = \int_A f dF_1 - \int_A f dF_2$$

при условии, что интегралы в правой части имеют смысл (проверьте корректность этого определения).

В случае $A = [a,b)$ вместо $\int_{[a,b)} f dF$ иногда пишут $\int_a^{b-} f dF$. Заметим, что этот интеграл совпадает с $\int_{[a,b]} f dF$, только если $f(b) m_F(\{b\}) = 0$, так как

$$\int_{[a,b]} f dF = \int_{[a,b)} f dF + f(b) m_F(\{b\})$$

(докажите последнее равенство).

Обозначим через $K[a,b]$ класс функций $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, представимых в виде $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ не убывают, непрерывны слева и имеют на отрезке $[a,b]$ конечное (или пустое) множество точек разрыва, а вне этого множества ограниченную производную.

**Теорема 1** (теорема о вычислении интеграла Лебега-Стилтьеса). *Пусть функция $F \in K[a,b]$ имеет на промежутке $[a,b)$ конечное (или пустое) множество точек разрыва $\{x_k\}$, $h_k$ — величина скачка функции $F$ в точке $x_k$. Тогда для любой $m_F$-интегрируемой борелевской функции $f$ на $[a,b)$*

$$\int\limits_{[a,b)} f dF = \int\limits_{[a,b)} f(x) F'(x) dx + \sum_k f(x_k) h_k. \tag{5.1}$$

Наряду с интегралом Лебега-Стилтьеса бывает полезен и интеграл Римана-Стилтьеса, который определяется аналогично интегралу Римана.

**Определение 4**. Пусть функция $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, а $F \in BV[a,b]$. Для разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ промежутка $[a,b)$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$ определим интегральные суммы Римана-Стилтьеса следующим образом:

$$\sigma(f, P, F) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})). \tag{5.1}$$

Положим $\lambda(P) = \max_k (x_k - x_{k-1})$. Если предел $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, F)$ существует (и не зависит от выбора отмеченных точек $\xi_k$), то он называется *интегралом Римана-Стилтьеса функции $f$ с интегрирующей функцией $F$ по $[a,b)$* и обозначается $\int_a^b f dF$.

**Теорема 2** (теорема о связи интегралов Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса). *Если функция $f$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $F \in BV[a,b]$ непрерывна слева, то интеграл Римана-Стилтьеса функции $f$ существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега-Стилтьеса.*

**Упражнение 3.*** Пусть $F(x) = x^2$. Приведите пример функции, для которой существует интеграл Лебега-Стилтьеса на $[0, 1]$ относительно $F$, но не существует интеграл Римана-Стилтьеса на $[0, 1]$ относительно $F$.

## §6. Замена переменной в интеграле Лебега

Понятие измеримой функции может быть обобщено следующим образом.

**Определение 1**. Пусть $X$ и $Y$ есть множества, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — $\sigma$-алгебры их подмножеств соответственно. Отображение $g : X \to Y$ называется *измеримым*, если $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ для любого $A \in \mathcal{C}$.

С помощью измеримого отображения можно «пересадить» меру с $X$ на $Y$.

**Определение 2**. Пусть к тому же $(X, \mathcal{B}, \mu)$ есть пространство с $\sigma$-конечной мерой. Для измеримого отображения $g : X \to Y$ определим меру $\mu g^{-1}$ на $\mathcal{C}$ равенством $(\mu g^{-1})(A) = \mu(g^{-1}(A)),\ A \in \mathcal{C}$. Эта мера называется *образом меры $\mu$ при отображении $g$* (и обозначается иногда $g(\mu)$).

**Упражнение 1**. Докажите, что $\mu g^{-1}$ действительно является мерой.

Следующая теорема бывает полезна при преобразовании интегралов (в частности, в теории вероятностей).

**Теорема 1** (теорема о замене переменной в интеграле). *Пусть $(X, \mathcal{B})$ и $(Y, \mathcal{C})$ есть множества с фиксированными $\sigma$-алгебрами своих подмножеств, $g : X \to Y$ — измеримое отображение. Пусть $\sigma$-конечная мера $\mu$ на $\mathcal{B}$ такова, что ее образ $\nu = \mu g^{-1}$ также $\sigma$-конечен. Тогда для любой неотрицательной борелевской функции $f$ на $Y$*

$$\int\limits_X f(g(x))d\mu(x) = \int\limits_Y f(y)d\nu(y). \tag{6.1}$$

**Замечание**. Доказанное равенство остается справедливым и без предположения о неотрицательности функции $f$, если дополнить его утверждением, что из существования интеграла в одной его части вытекает существование интеграла в другой.

Одним из следствий предыдущей теоремы является формула замены переменных в интеграле по $n$-мерной мере Лебега. Приведем этот результат в случае $n = 1$.

**Следствие 1** (о замене переменной в интеграле по мере Лебега). *Пусть функция $g$ отображает интервал $I_2$ на интервал $I_1$ и обладает ограниченной производной $g'(x) > 0$. Тогда для любой неотрицательной борелевской функции $f$ на интервале $I_1$*

$$\int_{I_1} f(y)dy = \int_{I_2} f(g(x))g'(x)dx. \tag{6.2}$$

## §7. Пространства $L^p$

В этом параграфе будут введены классы функций, весьма полезные в математическом анализе (см., например, доказательство теоремы Радона-Никодима в §8) и его приложениях.

**Определение 1**. Пусть $p \in [1, \infty)$. Говорят, что функция $f$ на $X$ принадлежит $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, если она измерима и $f^p \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. При этом полагают

$$\|f\|_p = \left( \int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

(левая часть читается «норма $f$ в пространстве $\mathcal{L}^p$»).

Вместо $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ пишут также $\mathcal{L}^p(\mu)$ (или $\mathcal{L}^p(X)$, если ясно, о какой мере идет речь), а норму $f$ в пространстве $\mathcal{L}^p$ обозначают еще $\|f\|_{L^p(\mu)}$.

Важную роль в теории пространств $L^p$ играют неравенства Гёльдера и Минковского, которые мы сейчас установим.

Как уже отмечалось, произведение интегрируемых функций не всегда интегрируемо. Однако имеет место

**Теорема 1** (неравенство Гёльдера). *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. *Если* $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ *и* $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$, *то произведение* $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *и справедливо неравенство*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

*причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда* $c_1 |f|^p = c_2 |g|^q$ *п. в. для постоянных* $c_1, c_2$, *не равных нулю.*

**Замечания**. 1). В теории пространств $L^p$ неотрицательные числа $p, q$, удовлетворяющие равенству $1/p + 1/q = 1$, носят название *сопряженных показателей.*

2) При $p = 2$ неравенство Гёльдера называется *неравенством Коши-Буняковского* (или неравенством Шварца).

**Упражнение 1.*** Докажите, что $\mathcal{L}^p(X, \mu) \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$, если $1 \leq p$ и мера $\mu$ конечна.

**Упражнение 2.** Докажите, что ни одно из пространств $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ не содержится в другом.

**Теорема 2** (неравенство Минковского). *Пусть* $p \in [1, \infty)$ *и* $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. *Тогда*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Замечание**. Одновременно мы показали, что $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ является векторным пространством.

**Упражнение 3.** Если $X = \mathbb{N}$, а $\mu$ — считающая мера, пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ обозначается $l_p$. Запишите неравенства Гёльдера и Минковского для этого случая.

Смысл неравенства Минковского в том, что функция

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_p \ (f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mu))$$

удовлетворяет *неравенству треугольника* $\rho(f,g) \le \rho(f,h) + \rho(h,g)$ при $f,g,h \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Очевидно также, что $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ и $\rho(f,f) = 0$. Однако она не является метрикой, так как из равенства $\rho(f,g) = 0$ следует лишь, что $f = g$ п. в. Чтобы исправить ситуацию, введем подпространство

$$\mathcal{N}(X,\mu) = \{f : f = 0 \ \mu \text{ -п. в. } \}$$

пространства $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ и рассмотрим факторпространство

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu).$$

Другими словами, мы перестаем различать $\mu$-эквивалентные функции из $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Элементами $L^p(X,\mu)$ являются классы эквивалентности $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu) : g \sim f\}$ элементов $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Если теперь мы положим $\|\tilde{f}\|_p := \|f\|_p, \ \rho_p(\tilde{f},\tilde{g}) = \|\tilde{f}-\tilde{g}\|_p$, то получим метрику на $L^p(X,\mu)$ (более того, это метрическое пространство полно, что будет доказано позднее).

Отметим, что элементы из $L^p(X,\mu)$ не являются функциями (в частности, для них не определено значение в точке). Впрочем, допуская вольность речи, элементы из $L^p(X,\mu)$ называют функциями, если это не приводит к недоразумениям.

Дополним теорию пространств $L^p(X,\mu)$ рассмотрением предельного случая $p = \infty$.

**Определение 7.** Говорят, что измеримая функция $f$ на $X$ *существенно ограничена сверху*, если для некоторой константы $c$ имеем $f(x) \le c$ $\mu$-п. в. При этом *существенная верхняя грань функции* $f$ определяется как

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{c : f(x) \le c \ \mu\text{-п. в. } \}$$

Аналогично определяются существенно ограниченные снизу функции и $\operatorname{essinf} f$. Функция называется *существенно ограниченной*, если она существенно ограничена как сверху, так и снизу.

**Определение 8.** Определим пространство $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ как множество всех существенно ограниченных функций на $X$, т. е. таких измеримых функций $f$ на $X$, для которых

$$\|f\|_\infty := \mathrm{esssup}|f| < \infty.$$

**Упражнение 4.** Докажите, что $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ есть векторное пространство относительно поточечных операций сложения функций и умножения на скаляр.

По причинам, уже отмечавшимся выше, удобно отождествлять функции из $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, совпадающие почти всюду, т. е. рассматривать фактор-пространство

$$L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu).$$

Как и в случае $p < \infty$, для $\tilde{f},\tilde{g} \in L^\infty(X,\mu)$ полагают $\|\tilde{f}\|_\infty := \|f\|_\infty$, $\rho_\infty(\tilde{f},\tilde{g}) := \|\tilde{f}-\tilde{g}\|_\infty$.

**Упражнение 5.** Проверьте аксиомы метрики для $\rho_\infty$.

**Упражнение 6.** Докажите следующий аналог неравенства Гёльдера: если $f \in L^1(X,\mu)$, а $g \in L^\infty(X,\mu)$, то $fg \in L^1(X,\mu)$ и $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.

## §8. Знакопеременные меры и теорема Радона-Никодима

Часто бывает полезно следующее обобщение понятия меры.

**Определение 1**. Пусть $\mu_1$, $\mu_2$ — две конечные меры, определенные на одной и той же $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Функция множества, определенная равенством

$$\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A) \ (A \in \mathcal{B}), \tag{8.1}$$

называется *знакопеременной мерой (зарядом)*.

**Замечание**. Ясно, что заряд является $\sigma$-аддитивной вещественнозначной функцией, определенной на $\sigma$-алгебре. Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Разумеется, разложение (8.1) не единственно, но оно будет единственным, если потребовать, чтобы меры $\mu_1$, $\mu_2$ были взаимно сингулярными в смысле следующего определения. При этом разложение (8.1) называется *разложением Жордана заряда $\nu$*.

**Определение 2**. Меры $\mu_1, \ \mu_2$, определенные на одной и той же $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$, называются *взаимно сингулярными* (пишут $\mu_1 \perp \mu_2$), если $X$ разбивается на такие измеримые множества $X_1$ и $X_2$, что $\mu_1(X_2) = \mu_2(X_1) = 0$ (т. е. эти меры сосредоточены на дизъюнктных множествах).

Дадим пример меры, взаимно сингулярной с мерой Лебега.

**Упражнение 1***. Докажите, что $m_\varphi \perp m$, где $\varphi$ — функция Кантора (см. главу 2).

***Теорема 1**. *Разложение* (8.1) *единственно, если меры* $\mu_1, \ \mu_2$ *взаимно сингулярны.*

В разложении Жордана заряда $\nu$ меры $\mu_1$ и $\mu_2$ обычно обозначают $\nu^+$ и $\nu^-$ соответственно и называют *положительной и отрицательной частями заряда* $\nu$. Можно доказать, что

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\},$$

$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\}$$

(почему функции $\nu^+$ и $\nu^-$, определенные этими равенствами, являются мерами?).

Положительную меру $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ называют *вариацией заряда* $\nu$ .

Определение интеграла Лебега-Стилтьеса со знакопеременной интегрирующей функцией очевидным образом переносится на эту более общую ситуацию: если $f \in \mathcal{L}^1(X, \nu^+) \cap \mathcal{L}^1(X, \nu^-)$, то

$$\int\limits_X f d\nu := \int\limits_X f d\nu^+ - \int\limits_X f d\nu^-.$$

Читатель легко проверит, что

$$\left| \int\limits_X f d\nu \right| \leq \int\limits_X |f| d|\nu|.*$$

Следующее свойство мер является в некотором смысле противоположным взаимной сингулярности.

**Определение 3**. Пусть мера $\mu$ задана на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Заряд $\nu$, определенный на $\mathcal{B}$, называется *абсолютно непрерывным относительно* $\mu$ (пишут $\nu \ll \mu$), если из того, что $\mu(E) = 0$, следует, что $\nu(E) = 0$ (т. е. $\nu$ обладает не меньшим запасом пренебрежимых множеств, чем $\mu$).

Покажем, что абсолютная непрерывность действительно является разновидностью непрерывности.

**Лемма 1** ($\varepsilon - \delta$-условие абсолютной непрерывности). *Пусть ограниченная мера $\nu$ и мера $\mu$ заданы на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Условие $\nu \ll \mu$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $\mu(E) < \delta$ влечет неравенство $\nu(E) < \varepsilon$.*

**Упражнение 2**. Докажите, что если $\nu \ll \mu$ и $\nu \perp \mu$, то $\nu = 0$.

Примеры зарядов, абсолютно непрерывных относительно $\mu$, дают интегралы $\nu(E) = \int_E f d\mu$ при фиксированной функции $f$, рассматриваемые как функция множества. Важная теорема Радона-Никодима утверждает, что других примеров нет.

**Теорема 3** (теорема Радона-Никодима). *Пусть $\nu$ и $\mu$ — $\sigma$-конечные меры, заданные на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Если $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$, то на $X$ существует такая единственная с точностью до $\mu$-эквивалентности функция $y \geq 0$, что*

$$\nu(A) = \int\limits_A y d\mu \ (A \in \mathcal{B}). \tag{8.2}$$

***Теорема 4** (теорема Радона-Никодима для зарядов). *Пусть $\nu$ есть заряд, а $\mu$ — $\sigma$-конечная мера, заданные на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Если $\nu$ абсолютно непрерывен относительно $\mu$, то существует такая единственная с точностью до эквивалентности функция $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, что*

$$\nu(A) = \int\limits_A f d\mu \ (A \in \mathcal{B}).$$

Доказательство сразу следует из предыдущей теоремы, если заметить, что $\nu^{\pm} \ll \mu$ вместе с $\nu$. $\Box$*

**Замечание**. В случае выполнения равенства (8.2) функция $y$ называется *плотностью заряда $\nu$* относительно меры $\mu$, а также *производной Радона-Никодима*, и обозначается $d\nu/d\mu$, а само равенство записывается в символическом виде $d\nu = y d\mu$.

Возникает вопрос: при каких условиях на функцию распределения мера Лебега-Стилтьеса $m_F$ будет абсолютно непрерывна относительно $m$? Для ответа на него введем следующее понятие.

**Определение 5**. Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого дизъюнктного набора интервалов $(a_j, b_j)(j = 1, \ldots, n)$ условие $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \varepsilon$ влечет $\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \delta$.

Аналогично определяется абсолютная непрерывность функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, нужно лишь дополнительно потребовать, чтобы $(a_j, b_j) \subset [a, b]$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Совокупность всех абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать $AC[a, b]$.

**Упражнения 3**. Докажите следующие свойства абсолютно непрерывных функций:

1) $AC[a, b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями), содержащее все функции, удовлетворяющие на $[a, b]$ условию Липшица.

2) Абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна.

3)* $AC[a, b] \subset BV[a, b]$.

**Теорема 5** (теорема об абсолютной непрерывности меры Лебега-Стилтьеса). *Мера Лебега-Стилтьеса $m_F$ с функцией распределения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $m$ тогда и только тогда, когда $F$ абсолютно непрерывна.*

Понятие абсолютной непрерывности играет ключевую роль в решении вопроса о справедливости формулы Ньютона-Лейбница, т. е. равенства

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a), \tag{NL}$$

для интеграла Лебега.

В общем случае это равенство неверно, даже если $F$ почти всюду дифференцируема. Для примера достаточно взять в качестве $F$ функцию Кантора $\varphi$, для которой, очевидно, $\varphi' = 0$ п. в., но $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$.

Но имеет место следующая

**Теорема 6** (основная теорема математического анализа для интеграла Лебега). *Для функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ следующие утверждения равносильны:*

*1)* $F \in AC[a,b]$*;*

*2)* $F$ *дифференцируема п. в. на* $[a,b]$, $F' \in \mathcal{L}^1[a,b]$ *и при всех* $x \in [a,b]$ *справедлива формула* (NL).

**Теорема 7** (теорема Лебега о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом). *Если* $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$, *то*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{[a,x)} f(t)dt = f(x) \text{ п. в.}$$

**Замечание.** Из основной теоремы математического анализа для интеграла Лебега, в частности, следует, что функция Кантора $\varphi \notin AC[0,1]$, хотя является равномерно непрерывной и имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$.

## §9. Произведение мер и теорема Фубини

Как определить меру Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$, исходя из меры Лебега $m$ на прямой $\mathbb{R}$? Мотивируясь формулой площади прямоугольника, естественно рассмотреть систему подмножеств плоскости вида $A \times B$, где $A$ и $B$ — измеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}$, и положить $m_2(A \times B) := m(A)m(B)$. Оказывается, $m_2$ является мерой на полуалгебре этих «обобщенных прямоугольников», и можно применить процесс продолжения меры, описанный в главе 2. Аналогично строится мера Лебега в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ и т. д., а также на торе, цилиндрических поверхностях и прочих прямых произведениях, так что целесообразно сразу рассмотреть общую схему.

Для этого нам понадобится следующая простая

**Лемма 1**. *Пусть* $\mathcal{S}_i$ *— полуалгебра подмножеств множества* $X_i$ $(i = 1,2)$. *Тогда система множеств*

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{S}_i,\ i = 1,2\}$$

*есть полуалгебра подмножеств множества* $X_1 \times X_2$.

Доказательство сводится к простой проверке для $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ аксиом полуалгебры с помощью тождеств

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A \times B)' = (A \times B') \sqcup (A' \times B) \sqcup (A' \times B').\square$$

**Замечание**. Система $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ может не быть даже алгеброй и в том случае, когда $\mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$ являются сигма-алгебрами (приведите пример). Это еще один аргумент в пользу введения понятия полуалгебры.

**Теорема 1** (теорема-определение произведения мер). *Пусть* $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ *— пространства с мерой. Определим функцию* $\mu_1 \times \mu_2$ *на полуалгебре* $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ *следующим образом:*

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \ (A_i \in \mathcal{B}_i, \ i = 1, 2).$$

*Тогда она будет мерой. Лебеговское продолжение этой меры обозначается* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *и называется* произведением мер $\mu_1$ *и* $\mu_2$.

Сейчас мы можем сформулировать две важные теоремы о переходе от двойного интеграла к повторному.

**Теорема 2** (теорема Фубини-Тонелли). *Пусть* $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ *— пространства с сигма-конечными мерами.*

1 (Тонелли). *Если функция* $f$ *на* $X_1 \times X_2$ *неотрицательна и* $\mu_1 \otimes \mu_2$*-измерима, то*

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{X_1} \left( \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int\limits_{X_2} \left( \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2), \tag{9.1}$$

*причем утверждение теоремы включает измеримость п. в. внутренних интегралов (как функций, заданных интегралами, зависящими от параметра).*

2 (Фубини). *Если* $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, *то справедливо равенство* (9.1), *причем утверждение теоремы включает существование и интегрируемость п. в. внутренних интегралов (как функций, заданных интегралами, зависящими от параметра).*

**Следствие 1**. *Для множества* $E \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ *положим*

$$E_x = \{y \in X_2 : (x, y) \in E\}, E^y = \{x \in X_1 : (x, y) \in E\}.$$

*Тогда*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(E) = \int\limits_{X_1} \mu_2(E_x) d\mu_1(x) = \int\limits_{X_2} \mu_1(E^y) d\mu_2(y).$$

Доказательство. Достаточно применить теорему Тонелли к функции $\chi_E$.$\square$

**Замечание**. Если хотя бы одна из мер не $\sigma$-конечна, теоремы Фубини и Тонелли могут не выполняться. В качестве соответствующего контрпримера можно взять $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mu_1 = m, \mu_2$ — считающая мера, $f = \chi_D$, где $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$.

**Упражнение 1.*** Проверьте.

**Упражнение 2***. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu_1 = \mu_2$ — считающая мера. Положим $f(m,n) = 1$, если $m = n$, $f(m,n) = -1$, если $m = n+1$, и $f(m,n) = 0$ в остальных случаях. Тогда $f \notin \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, но повторные интегралы существуют и равны. Докажите.

**Замечание**. Теоремы Фубини и Тонелли часто применяются в следующей ситуации. Допустим, что нам нужно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f d\mu_2\right) d\mu_1$. Тогда сначала мы используем теорему Тонелли, чтобы доказать (путем перехода к повторному), что $\int_{X_1\times X_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$, а затем применяем теорему Фубини к $\int_{X_1\times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)$.